Есть такой человек с квантэла – Страупе Станислав Сергеевич. Ввёл у меня введение в кванты. И вот он говорил «вот будет у вас в пятом семестре скобка Пуассона, вы будете плеваться, говорить, что это скучное говно, а это на самом деле коммутатор, просто в теормехе!»
Станислав Сергеевич был прав: скобка Пуассона действительно скучное говно и это действительно аналог коммутатора в теормехе.

Определение: пусть величины f и g являются функциями обобщённых координат, обобщённых импульсов, и, возможно, времени:

$$f(p_i,\ q_i, t)$$

$$g(p_i,\ q_i, t)$$

Тогда скобкой Пуассона $\{f, g\}$ является следующая величина:

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$$

Подстановкой можно убедиться в том, что

$$\{q_j, p_k\}$$

равна 0, если j не равно k и 1, если j=k. Ничего не напоминает? Ну конечно:

$$[\hat{x}, \widehat{p_x}] = 1, \left[\hat{y}, \widehat{p_y}\right] = 1, [\hat{z}, \widehat{p_z}] = 1$$

Аналогично

$$\{q_j, q_k\} = \{p_j, p_k\}\ \forall j, k$$

Тоже как для коммутаторов.
Разумеется, приведённое выше нельзя считать доказательством квантовой механике. Это скорее красивая иллюстрация «вау, классические коммутаторы. Для чего тогда нужны скобки Пуассыча? Об этом в конце.

Решим экзаменационную задачу (которую, кстати, разбирает Пименов)
Вычислить скобку Пуассона $\{v_x, v_z\}$ для компонент вектора скорости нерелятивистской частицы в произвольном электромагнитном поле.
Алгоритм нахождения скобок Пуассона:
1) Выразить 2 величины, для которых нужно подсчитать скобку Пуассона, через обобщённые координаты и импульсы.
Так, ну что, ваще изи катка, сейчас затащим. Что там? Скорости? $v_x = \frac{p_x}{m}, v_z = \frac{p_z}{m}$.
Псс, слышите, как бьётся головой об стену автор методички:

Он напоминает вам, что **обобщённый импульс НЕ ВСЕГДА БЛИН равен массе*обобщённая скорость.**

Напоминаю простейший контрпример: угол φ безразмерен, обобщённый импульс p_φ имеет размерность энергии. Их отношение никак не может иметь размерность массы.

Обобщённые импульсы считаются через обобщённые скорости:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

если мы знаем лагранжиан, или

$$\dot{q}_k = -\frac{\partial H}{\partial \dot{p}_k}$$

Если мы знаем гамильтониан.

Что-то нам в любом случае нужно знать, потому что или лагранжиан, или гамильтониан определяет поведение частицы.

Лагранжиан заряженной частицы (его следует помнить!)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}} - e\varphi$$

Гамильтониан (тоже следует помнить)

$$H = \frac{\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r})\right)^2}{2m} + e\varphi(\vec{r})$$

В данном случае нам нужно подсчитать обобщённые скорости через обобщённые импульсы, т.е. нам нужна формула $\dot{q}_k = -\frac{\partial H}{\partial \dot{p}_k}$

Погнали:

$$\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial \dot{p}_x} = \frac{1}{m}\left(p_x - \frac{e}{c}A_x\right)$$

$$\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial \dot{p_y}} = \frac{1}{m}\left(p_y - \frac{e}{c}A_y\right)$$

$$\dot{z} = -\frac{\partial H}{\partial \dot{p_z}} = \frac{1}{m}\left(p_z - \frac{e}{c}A_z\right)$$

Шаг 1 выполнен.

Шаг 2: подсчёт скобки Пуассона можно сделать как по определению

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$$

считая частные производные, так и пользуясь готовыми скобками Пуассона:

$\{q_j, p_k\}$ равна 0, если j не равно k и 1, если j=k

$$\{q_j, q_k\} = \{p_j, p_k\}\,\forall j,k$$

и свойствами скобок Пуассона:

$$\{af, bg\} = ab\{f,g\}\ (a, b - const)$$

$$\{f_1 + f_2, g_1 + g_2\} = \{f_1, g_1\} + \{f_1, g_2\} + \{f_2, g_1\} + \{f_2, g_2\}$$

$$\{g, f\} = -\{f, g\}$$

Точно такие же, как для коммутатора!

Также часто оказываются полезны формулы, если каноническая переменная является одним из аргументов скобки Пуассона:

$$\{f, p_j\} = \frac{\partial f}{\partial q_j} \Leftrightarrow \{p_j, g\} = -\frac{\partial g}{\partial q_j}$$

$$\{q_j, g\} = \frac{\partial g}{\partial p_j} \Leftrightarrow \{f, q_j\} = -\frac{\partial f}{\partial p_j}$$

Доказательство элементарное подстановкой в определение.

Нам нужно подсчитать скобку от $\{v_x, v_z\} = \left\{\frac{1}{m}\left(p_x - \frac{e}{c}A_x\right), \frac{1}{m}\left(p_z - \frac{e}{c}A_z\right)\right\} =$ $\frac{1}{m^2}\left(\{p_x, p_z\} + \frac{e^2}{c^2}\{A_x, A_z\} - \frac{e}{c}\{p_x, A_z\} - \frac{e}{c}\{A_x, p_z\}\right)$

А теперь смотрим. $\{p_x, p_z\} = 0$ - см. выше. $\{A_x, A_z\} = 0$ - это уже не так очевидно. Связано это с тем, что векторный потенциал является лишь функцией координат и если подставить его в определение $\{f,g\} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$, все частные производные по импульсам будут нулевыми.

Что насчёт $\{p_x, A_z\}$? А тут как раз надо применить $\{p_j, g\} = -\frac{\partial g}{\partial q_j}$. А для $\{A_x, p_z\} = \{f, p_j\} = \frac{\partial f}{\partial q_j}$. Вот и получим

$$\{v_x, v_z\} = \frac{1}{m^2}\left(-\frac{e}{c} * \left(-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \frac{e}{c}\frac{\partial A_x}{\partial z}\right) = \frac{e}{m^2 c}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)$$

А те из вас, кто знают электрод, подскажут нам, что $\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}$ есть H_y. Или $-H_y$. Я не помню, меня эти знаки уже достали. Сами посмотрите ☺

Зачем вообще нужны скобки Пуассона?

Ну не по приколу же их придумали ☺

Попытаемся понять, какой у них физический смысл.

По сути они постулируют независимость канонических переменных друг от друга. Давайте себе представим, что в гамильтониане p_3 стал зависеть, например, от q_7 и p_{10}. Тогда беря скобку Пуассона $\{p_3, q_7\}$ или $\{p_3, p_{10}\}$ (неважно, как - по определению $\{f,g\} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$ или по правилам

$$\{f, p_j\} = \frac{\partial f}{\partial q_j} \Leftrightarrow \{p_j, g\} = -\frac{\partial g}{\partial q_j}$$

$$\{q_j, g\} = \frac{\partial g}{\partial p_j} \Leftrightarrow \{f, q_j\} = -\frac{\partial f}{\partial p_j})$$

она окажется ненулевой, т.е. зафиксирует связь канонических переменных друг с другом.

Хорошо, скажете вы, а зачем нам проверять независимость канонических переменных таким извращённым способом? А вы представьте, что Вася Пупкин, насмотревшись на гамильтониан нерелятивистской частицы в э/м поле

$$H = \frac{\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r})\right)^2}{2m} + e\varphi(\vec{r})$$

(давайте возьмём его одномерный случай: $\frac{\left(p - \frac{e}{c}A(x)\right)^2}{2m} + e\varphi(x)$) захочет сказать, что теперь $P = p - \frac{e}{c}A(x)$ - новый обобщённый импульс! Как мы можем возразить Васе Пупкину? Ведь мы достаточно ушли от понятия «импульс» и «координата» к «обобщённым импульсам» и «обобщённым координатам». Что-то же должно ограничивать наш с Васей произвол.

Да, теперь для пары переменных P и q не будут выполняться уравнения Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{q_k} = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p_k} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases}$$

Это может быть ограничением: если они верно, у нас обобщённые импульсы и обобщенные координаты, а если нет – то не они.

Но есть проблема: нужно иметь гамильтониан, а что, если у нас его нет? Как нам тогда возразить Васе Пупкину? Смотрите – «p» - это привычный нам импульс с 9-того класса. Ну не может быть $P = p - \frac{e}{c}A(x)$ также импульсом просто потому что нам так хочется!

Вот скобки Пуассона как раз ограничивают произвол Васи Пупкин. представьте, что у нас уже есть гарантированно верный набор N обобщённых имульсов и N обобщённых координат. А Вася Пупкин приносит свой, выраженный через нас. На вопрос «а чё не совпадает» он отвечает «да я был в своей СК». Вот если скобки Пуассона для его координат и импульсов будут верными, то да, он прав. А иначе – враньё детектед ☺

Замечу, кстати, что формула $\{f, p_j\} = \frac{\partial f}{\partial q_j}$ у вас ещё будет в квантовой теории в духе

$$[f(\hat{A}, \hat{B}), \hat{B}] = \frac{\partial f}{\partial \hat{A}}$$

с производной по оператору, ммм ☺

У вас, вероятно, ещё вопрос «а зачем нужен коммутатор в квантах». Этот наострейший (без шуток) вопрос мы обсудим в первой методичке по квантовой теории в 6-м семестре. Пока считайте, что он в квантах по приколу.

А ещё, открыв статью в Вики «скобки Пуассона», вы наткнётесь на алгебру Ли.

Чё вы ржёте? Ли – это такой математик. Софус Ли , норвежец, не имеющий никакого отношения к Брюсу Ли.

Под алгеброй математики имеют не школьную алгебру, а множество объектов линейного пространства (т.е. с определёнными операциями сложения между собой и умножения на число) и с очень хитрой операцией – скобкой Ли, обладающими свойствами

$$\{af, bg\} = ab\{f, g\}\ (a, b - const)$$

$$\{f_1 + f_2, g_1 + g_2\} = \{f_1, g_1\} + \{f_1, g_2\} + \{f_2, g_1\} + \{f_2, g_2\}$$

$$\{g, f\} = -\{f, g\}$$

Полученное таким образом множество называется алгеброй Ли. Это могут быть и канонические переменные – тогда скобкой Ли будет скобка Пуассона. Могут быть операторы – тогда скобкой Ли будет коммутаторы.